55. ročník Matematické olympiády

# II. kolo kategorie Z9

**Z9–II–1**

Petr a Honza šli plavat. Vzdálenosti, které uplavali, byly v poměru 4 : 5, Honza uplaval více. Další den šli znovu, tentokrát Petr uplaval o 200 metrů méně a Honza o 100 metrů více než předchozí den a poměr vzdáleností byl 5 : 8. Kolik metrů uplavali Honza a Petr první den? (*B. Šťastná*)

Řešení. Poměr vzdáleností, které Petr a Honza uplavali první den, je v poměru 4 : 5. Znamená to, že Petr uplaval $4x$ metrů a Honza $5x$ metrů. Potom druhý den Petr uplaval $(4x - 200)$ metrů, Honza $(5x + 100)$ metrů. Jsou-li tyto vzdálenosti v poměru 5 : 8, musí platit:

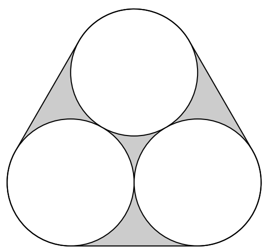
$$8 \cdot (4x - 200) = 5 \cdot (5x + 100),$$

$$x = 300\,\mathrm{m}.$$

Odtud: Petr uplaval první den $4 \cdot 300 = 1\,200\,\mathrm{m}$, Honza $5 \cdot 300 = 1\,500\,\mathrm{m}$.

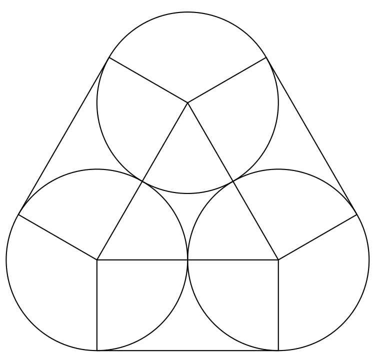
**Z9–II–2**

Určete obsah šedé plochy na obrázku, pokud víte, že kružnice se navzájem dotýkají a mají poloměr 1 cm a úsečky, které plochu ohraničují, jsou jejich společné tečny.



(*P. Tlustý*)

Řešení. Obsah šedé části vypočítáme jako rozdíl obsahu celého obrazce a obsahu bílé plochy (tj. tří kružnic). Při určování obsahu obrazce jej rozdělíme na rovnostranný trojúhelník, jehož vrcholy tvoří středy bílých kružnic (strana tohoto trojúhelníku je 2 cm), dále na tři shodné obdélníky, jejichž strany měří 1 cm a 2 cm, a konečně na tři shodné kruhové výseče. Poloměr těchto výsečí je 1 cm, středový úhel má velikost $360° - 2 \cdot 90° - 60° = 120°$.



Obsah rovnostranného trojúhelníku: Nejprve vypočteme užitím Pythagorovy věty výšku tohoto trojúhelníku:

$$v^2 + 1^2 = 2^2,$$

odtud $v = \sqrt{3}\,\mathrm{cm}$,

$$S_\triangle = \frac{a \cdot v}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2.$$

Obsah obdélníků:

$$S_{\mathrm{obd}} = 3 \cdot (1 \cdot 2) = 6\,\mathrm{cm}^2.$$

Obsah výsečí: Protože středový úhel všech tří výsečí měří 120°, je obsah těchto výsečí dohromady roven obsahu jednoho bílého kruhu.

Obsah jednoho bílého kruhu:

$$S_\circ = \pi r^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi\,\mathrm{cm}^2.$$

Obsah šedé plochy:

$$S = (S_\triangle + S_{\mathrm{obd}} + S_\circ) - 3 \cdot S_\circ = \left(\sqrt{3} + 6 + \pi\right) - 3 \cdot \pi = \left(6 + \sqrt{3} - 2\pi\right)\mathrm{cm}^2.$$

**Z9–II–3**

Marek si hraje s kalkulačkou. Na papír si napsal jedno číslo. Zadal je do kalkulačky a pak postupně mačkal tlačítka: plus, čtyři, děleno, čtyři, minus, čtyři, krát, čtyři. Výsledek opsal na papír. Poté s tímto číslem postupoval stejně jako s předcházejícím, tedy zase: plus, čtyři, děleno, čtyři, minus, čtyři, krát, čtyři. Výsledek si opět opsal na papír. Celý postup s tímto nově získaným číslem zopakoval a opět výsledek opsal na papír. Poté zjistil, že součet čtyř čísel zapsaných na papíře je 80. Která čísla a v jakém pořadí napsal Marek na papír? (*M. Raabová*)

Řešení. První číslo napsané na papíře označíme jako $x$. Potom druhé číslo na papíře má tvar:

$$\left[(x+4) : 4 - 4\right] \cdot 4 = \left[\frac{1}{4}x + 1 - 4\right] \cdot 4 = \left[\frac{1}{4}x - 3\right] \cdot 4 = x - 12.$$

To ale znamená, že každé následující číslo napsané na papíře je o 12 menší než číslo předcházející, tedy třetí číslo bude $(x - 24)$ a čtvrté $(x - 36)$. Dostáváme rovnici:

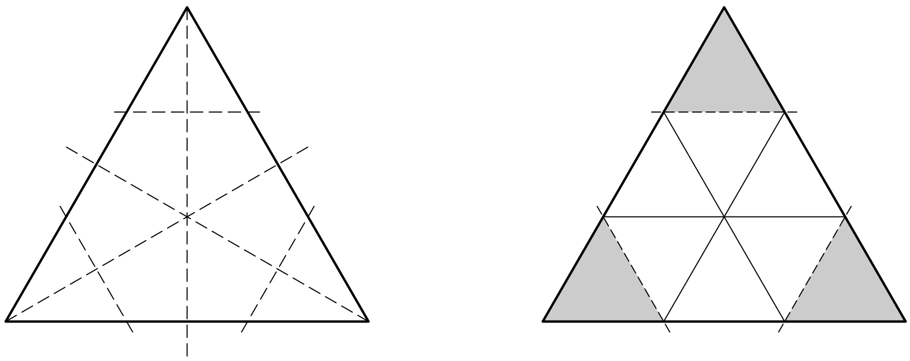
$$\begin{aligned} x + (x-12) + (x-24) + (x-36) &= 80, \\ x &= 38. \end{aligned}$$

Marek napsal na papír následující čísla (v tomto pořadí): 38; 26; 14; 2.

**Z9–II–4**

V rovnostranném trojúhelníku označte každý bod, jehož vzdálenost od nejbližšího vrcholu je menší než vzdálenost od těžiště. Kolik procent plochy rovnostranného trojúhelníku zaujímají body se zmíněnou vlastností? (*L. Šimůnek*)

Řešení. Nejprve si sestrojíme osy úseček, jejichž jedním krajním bodem je těžiště a druhým vrchol zadaného trojúhelníku. Protože osa úsečky je množina bodů, jejichž vzdálenost od obou krajních bodů úsečky je stejná, vyhovují vždy ty body trojúhelníku, které leží v polorovině obsahující příslušný vrchol trojúhelníku (obr.).



Rovnostranný trojúhelník lze rozdělit na 9 shodných rovnostranných trojúhelníků (obr.), přičemž tři z nich odpovídají bodům s uvedenou vlastností. To znamená, že tyto body zaujímají $33\frac{1}{3}\,\%$ plochy trojúhelníku.