55. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie B

1. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b a c platí nerovnost

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right) \geqq 8.$$

Zjistěte, kdy nastane rovnost.

2. Na přeponě AB pravoúhlého trojúhelníku ABC uvažujme body P a Q takové, že $|AP| = |AC|$ a $|BQ| = |BC|$. Označme M průsečík kolmice z vrcholu A na přímku CP a kolmice z vrcholu B na přímku CQ. Dokažte, že přímky PM a QM jsou navzájem kolmé.

3. Najděte všechny dvojice celých čísel a a b, pro něž žádná z rovnic

$$x^2 + ax + b = 0, \quad y^2 + by + a = 0$$

nemá dva různé reálné kořeny.

Klauzurní část školního kola kategorie B se koná

ve čtvrtek 26. ledna 2006

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Levou stranu L dokazované nerovnosti nejprve upravíme roznásobením a vzniklé členy sdružíme do dvojic navzájem převrácených výrazů:

$$\begin{aligned}L=\Bigl(a+\frac{1}{b}\Bigr)\Bigl(b+\frac{1}{c}\Bigr)\Bigl(c+\frac{1}{a}\Bigr)&=\Bigl(ab+1+\frac{a}{c}+\frac{1}{bc}\Bigr)\Bigl(c+\frac{1}{a}\Bigr)=\\&=\Bigl(abc+\frac{1}{abc}\Bigr)+\Bigl(a+\frac{1}{a}\Bigr)+\Bigl(b+\frac{1}{b}\Bigr)+\Bigl(c+\frac{1}{c}\Bigr).\end{aligned}$$

V každé z posledních závorek je tedy součet tvaru $u+1/u$, kde $u>0$, který má, jak víme, hodnotu aspoň 2, přičemž rovnost číslu 2 nastane jedině pro $u=1$. Podle tohoto známého tvrzení, které lze dokázat například úpravou

$$\Bigl(u+\frac{1}{u}\Bigr)-2=\Bigl(\sqrt{u}-\frac{1}{\sqrt{u}}\Bigr)^2\geqq 0,$$

pro výraz L platí $L\geqq 2+2+2+2=8$, což jsme měli dokázat. Rovnost $L=8$ ovšem nastane, právě když platí

$$abc+\frac{1}{abc}=a+\frac{1}{a}=b+\frac{1}{b}=c+\frac{1}{c}=2,$$

tedy jak jsme už vzpomenuli, právě když $abc=a=b=c=1$, tj. právě když $a=b=c=1$.

Poznámka. Dodejme, že upravená nerovnost

$$abc+a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{abc}\geqq 8$$

plyne okamžitě z nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem osmi čísel

$$abc,\ a,\ b,\ c,\ \frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c},\ \frac{1}{abc},$$

neboť jejich součin (a tedy i geometrický průměr) je roven číslu 1, takže jejich aritmetický průměr má hodnotu aspoň 1.

Jiné řešení. V dokazované nerovnosti se nejprve zbavíme zlomků, a to tak, že obě její strany vynásobíme kladným číslem abc. Dostaneme tak ekvivalentní nerovnost

$$(ab+1)(bc+1)(ac+1)\geqq 8abc,$$

která má po roznásobení levé strany tvar

$$a^2b^2c^2+a^2bc+ab^2c+abc^2+ab+ac+bc+1\geqq 8abc.$$

Poslední nerovnost lze upravit do tvaru

$$(abc-1)^2+ab(c-1)^2+ac(b-1)^2+bc(a-1)^2\geqq 0.$$

Tato nerovnost již zřejmě platí, neboť na levé straně stojí součet čtyř nezáporných výrazů, přitom rovnost nastane, právě když má každý ze čtyř těchto výrazů nulovou hodnotu, tedy právě když

$$abc - 1 = c - 1 = b - 1 = a - 1 = 0$$

neboli $a = b = c = 1$.

Další řešení. Danou nerovnost lze dokázat i bez roznásobování její levé strany. Stačí zapsat tři AG-nerovnosti

$$\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{b}\right) \geqq \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{c}\right) \geqq \sqrt{\frac{b}{c}}, \quad \frac{1}{2}\left(c + \frac{1}{a}\right) \geqq \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Jejich vynásobením dostaneme

$$\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{b}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{c}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(c + \frac{1}{a}\right) \geqq \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{\frac{b}{c}} \cdot \sqrt{\frac{c}{a}} = 1,$$

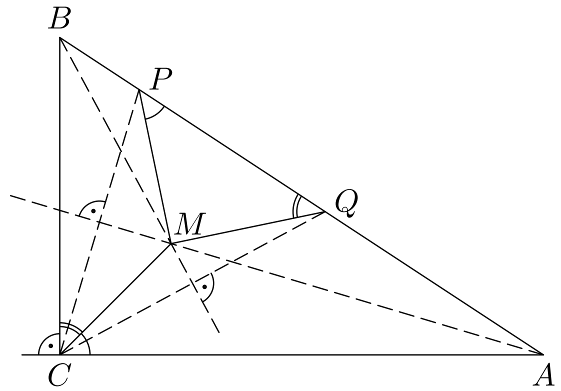
odkud po násobení osmi obdržíme dokazovanou nerovnost. Rovnost v ní nastane, právě když nastane rovnost v každé ze tří použitých AG-nerovností, tedy právě když se čísla v každé průměrované dvojici rovnají:

$$a = \frac{1}{b}, \ b = \frac{1}{c}, \ c = \frac{1}{a}.$$

Z prvních dvou rovností plyne $a = c$, po dosazení do třetí rovnosti pak vychází $a = c = 1$, tudíž i $b = 1$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 4 body za důkaz nerovnosti a 2 body za úplnou analýzu případu rovnosti (1 bod za uvedení případu $a = b = c = 1$, 1 bod za vyloučení jiné možnosti). Za správné roznásobení levé strany nerovnosti udělte 1 bod, 1 až 2 body za účelné využití jedné či několika AG-nerovností nebo nerovností $u + 1/u \geqq 2$ (obojí možno považovat za známé poznatky, včetně případů rovnosti, není zapotřebí je dokazovat), 1 bod za dokončení důkazu nerovnosti.

2. Podle zadání je trojúhelník APC rovnoramenný, přímka AM prochází jeho hlavním vrcholem A kolmo k základně CP, je tudíž osou vnitřního úhlu CAP (obr. 1). Body C a P



Obr. 1

jsou proto souměrně sdružené podle přímky AM, takže úhly APM a ACM jsou shodné. (Jinými slovy trojúhelníky APM a ACM jsou shodné podle věty *sus*: odpovídající si strany AC a AP svírají se společnou stranou AM týž úhel díky tomu, že AM je osou úhlu CAP.) Podobně z rovnoramenného trojúhelníku BQC odvodíme, že BM je osou úhlu CBQ, takže i úhly BQM a BCM jsou shodné.

Rovnosti $|\sphericalangle APM| = |\sphericalangle ACM|$ a $|\sphericalangle BQM| = |\sphericalangle BCM|$ znamenají, že pro vnitřní úhly trojúhelníku PQM při vrcholech P, Q platí

$$\begin{aligned}|\sphericalangle QPM| + |\sphericalangle PQM| &= |\sphericalangle APM| + |\sphericalangle BQM| = \\ &= |\sphericalangle ACM| + |\sphericalangle BCM| = |\sphericalangle ACB| = 90^\circ,\end{aligned}$$

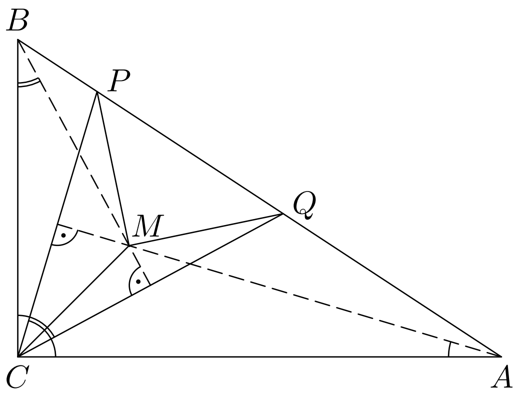
tudíž vnitřní úhel u třetího vrcholu M je pravý.

Jiný postup. Bod M jako průsečík os úhlů CAB a CBA leží i na ose pravého úhlu ACB. Proto úhly ACM a BCM mají oba velikost 45°, takže $|\sphericalangle APM| = |\sphericalangle ACM| = 45^\circ$, $|\sphericalangle BQM| = |\sphericalangle BCM| = 45^\circ$ a trojúhelník PQM je rovnoramenný pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu M.

Jiný postup. Ze souměrnosti bodů P a C podle přímky AM plyne $|PM| = |CM|$, ze souměrnosti bodů Q a C podle BM plyne $|QM| = |CM|$. Je tudíž $|PM| = |QM| = |CM|$ a bod M je tak středem kružnice opsané trojúhelníku PQC. Přitom označíme-li α a β úhly při vrcholech A a B (obr. 2), je $\alpha + \beta = 90^\circ$ a

$$(90^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha) + (90^\circ - \tfrac{1}{2}\beta) - |\sphericalangle PCQ| = 90^\circ,$$

takže $|\sphericalangle PCQ| = 45^\circ$. To je velikost obvodového úhlu nad tětivou PQ zmíněné kružnice. Velikost odpovídajícího středového úhlu PMQ je tudíž 90°.



Obr. 2

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za zdůvodnění, že bod M je průsečíkem os vnitřních úhlů trojúhelníku ABC.

3. Jak víme, kvadratická rovnice *má* dva různé reálné kořeny, právě když je její diskriminant kladný. Proto rovnice ze zadání úlohy tuto vlastnost *nemají*, právě když jsou jejich diskriminanty

$$D_1 = a^2 - 4b, \quad D_2 = b^2 - 4a$$

nekladné, tedy právě když platí

$$a^2 \leqq 4b \quad \text{a} \quad b^2 \leqq 4a. \tag{1}$$

Odtud předně plyne, že obě čísla b i a jsou nezáporná (protože jsou nezáporná obě čísla a^2 a b^2). Nyní na (1) pohlédneme jako na soustavu nerovnic s neznámou b a nezáporným parametrem a a snadno ji v oboru nezáporných čísel vyřešíme:

$$\frac{a^2}{4} \leqq b \leqq 2\sqrt{a}. \tag{2}$$

Nalezený interval je neprázdný, právě když pro nezáporný parametr a platí nerovnost

$$\frac{a^2}{4} \leqq 2\sqrt{a}, \quad \text{neboli} \quad a \leqq 4.$$

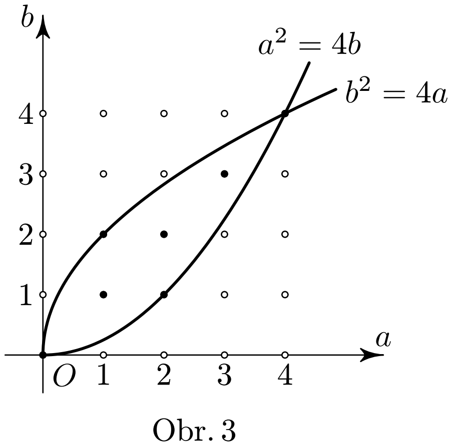
Protože čísla a, b jsou podle zadání celá, z odvozených nerovností $0 \leqq a \leqq 4$ plyne, že číslo a leží v množině $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Každé takové a jednotlivě do krajních výrazů v (2) dosadíme a vypíšeme, která celá b v příslušném intervalu leží:

$$\begin{array}{lll}
a = 0\colon & 0 \leqq b \leqq 0 & \iff b \in \{0\}, \\
a = 1\colon & \frac{1}{4} \leqq b \leqq 2 & \iff b \in \{1, 2\}, \\
a = 2\colon & 1 \leqq b \leqq 2\sqrt{2} & \iff b \in \{1, 2\}, \\
a = 3\colon & \frac{9}{4} \leqq b \leqq 2\sqrt{3} & \iff b \in \{3\}, \\
a = 4\colon & 4 \leqq b \leqq 4 & \iff b \in \{4\}.
\end{array}$$

Odpověď: Vyhovuje právě sedm dvojic (a, b):

$$(0,0),\ (1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (2,2),\ (3,3) \text{ a } (4,4).$$

Poznámka. Z nerovností (1) lze odvodit nejen $0 \leqq a \leqq 4$, ale z důvodu symetrie rovněž $0 \leqq b \leqq 4$. Proto místo námi popsaného řešení úpravou na soustavu (2) stačí jednotlivě otestovat 25 dvojic (a, b), kde $a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, zda vyhovují soustavě nerovností (1). Takovou úlohu lze rovněž interpretovat geometricky: v prvním kvadrantu souřadnicového systému Oab hledáme ty body s celočíselnými souřadnicemi, které leží uvnitř nebo na hranici oblasti omezené parabolami o rovnicích $4a = b^2$ a $4b = a^2$ (obr. 3).



Obr. 3

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za vyslovení podmínek na oba diskriminanty a jejich vyjádření nerovnostmi (1), 2 body za určení mezí 0 a 4 pro hodnoty a, b a 2 body za nalezení všech řešení. Pokud řešitel místo neostrých nerovností (1) chybně napíše pouze příslušné ostré nerovnosti a ty pak správně vyřeší (a tak dostane 3 ze 7 řešení), udělte 3 body.