55. ročník Matematické olympiády

Úlohy domácího kola kategorie B

1. *Určete všechny hodnoty celočíselného parametru a, pro něž má rovnice*

$$(x+a)(x+2a)=3a$$

aspoň jeden celočíselný kořen.

Řešení. Po roznásobení levé strany a převedení členu $3a$ z pravé strany na levou dostaneme kvadratickou rovnici

$$x^2+3ax+2a^2-3a=0.$$

Její kořeny (pokud existují) mají podle známého vzorce tvar

$$x_{1,2}=\frac{-3a+\sqrt{a^2+12a}}{2}.$$

Hodnota takového výrazu je celé číslo jen tehdy, je-li číslo a^2+12a druhou mocninou nějakého celého čísla b, o němž můžeme předpokládat, že je nezáporné. Rovnost $b = \sqrt{a^2+12a}$ upravíme umocněním a doplněním na čtverec do tvaru

$$(a+6)^2=b^2+36, \quad \text{neboli} \quad (a+6+b)(a+6-b)=36.$$

Dostali jsme rozklad čísla 36 na součin dvou celočíselných činitelů, které proto musejí mít stejné znaménko. Protože jejich rozdíl

$$(a+6+b)-(a+6-b)=2b$$

je sudé nezáporné číslo (připomínáme, že $b \geqq 0$), mají oba činitelé stejnou paritu (jsou zároveň sudá nebo lichá) a druhý činitel není větší než první činitel. To vše dohromady znamená, že jsou jen čtyři možnosti:

(1) $a+6+b=18$ a $a+6-b=2$. Tato soustava rovnic má jediné řešení $a=4$ a $b=8$. Zkouška: rovnice $(x+4)(x+8)=12$ má kořeny -10 a -2.

(2) $a+6+b=6$ a $a+6-b=6$. V tomto případě $a=0$ a $b=0$. Zkouška: rovnice $(x+0)(x+0)=0$ má dvojnásobný kořen 0.

(3) $a+6+b=-2$ a $a+6-b=-18$. V tomto případě $a=-16$ a $b=8$. Zkouška: rovnice $(x-16)(x-32)=-48$ má kořeny 20 a 28.

(4) $a+6+b=-6$ a $a+6-b=-6$. V tomto případě $a=-12$ a $b=0$. Zkouška: rovnice $(x-12)(x-24)=-36$ má dvojnásobný kořen 18.

Odpověď: Hledané hodnoty parametru a jsou čtyři, a to čísla 4, 0, -16 a -12.

Jiné řešení. Stejně jako v prvním řešení upravíme rovnici do tvaru

$$x^2 + 3ax + 2a^2 - 3a = 0$$

a pokusíme se mnohočlen na levé straně zapsat ve tvaru součinu dvou lineárních činitelů tvaru $\alpha x + \beta a + \gamma$. I když takový rozklad neexistuje, experimentováním zjistíme, že „téměř vyhovuje“ součin

$$(x + 2a + 3)(x + a - 3),$$

který se liší od daného mnohočlenu $x^2 + 3ax + 2a^2 - 3a$ pouze v konstantním členu; přesvědčete se o tom roznásobením. Zkoumanou rovnici tak lze zapsat ve tvaru

$$(x + 2a + 3)(x + a - 3) = -9.$$

I když na pravé straně není nula, pro řešení v oboru celých čísel je každý podobný rozklad cenný, neboť existuje pouze konečný počet rozkladů příslušného čísla (v našem případě -9) na součin dvou celočíselných činitelů. Vypišme je:
(1) $x + 2a + 3 = 9$ a $x + a - 3 = -1$, neboli $a = 4$ a $x = -2$,
(2) $x + 2a + 3 = 3$ a $x + a - 3 = -3$, neboli $a = 0$ a $x = 0$,
(3) $x + 2a + 3 = 1$ a $x + a - 3 = -9$, neboli $a = 4$ a $x = -10$,
(4) $x + 2a + 3 = -1$ a $x + a - 3 = 9$, neboli $a = -16$ a $x = 28$,
(5) $x + 2a + 3 = -3$ a $x + a - 3 = 3$, neboli $a = -12$ a $x = 18$,
(6) $x + 2a + 3 = -9$ a $x + a - 3 = 1$, neboli $a = -16$ a $x = 20$.

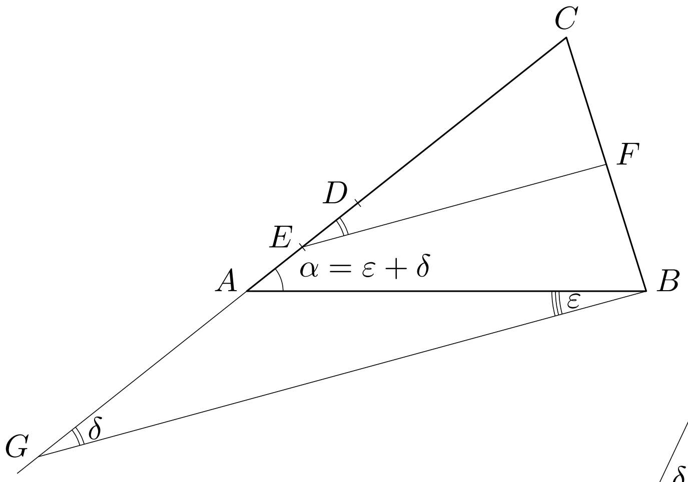
Docházíme tak ke stejné odpovědi jako v prvním řešení: vyhovující hodnoty parametru a jsou čísla 4, 0, -12 a -16.

Návodné a doplňující úlohy:

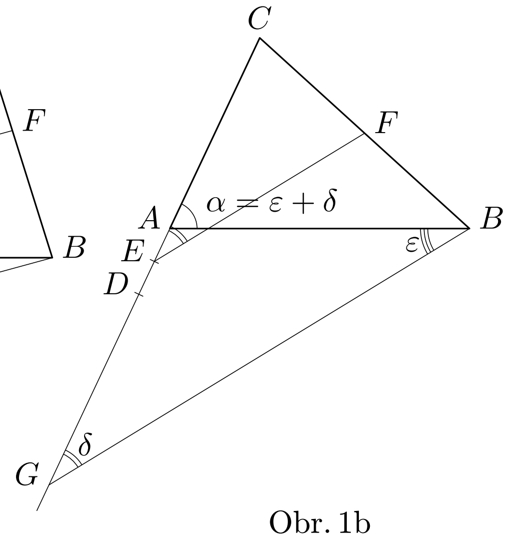
1. Najděte všechny hodnoty celočíselného parametru a, pro které má rovnice $x^2 + ax = 2\,005$ celočíselné řešení. [± 396, $\pm 2\,004$]
2. V oboru celých čísel řešte rovnici $2/a + 3/b = \frac{4}{5}$. [Hledané dvojice (a, b) jsou $(40, 4)$, $(10, 5)$, $(4, 10)$, $(2, -15)$ a $(-10, 3)$.]
3. Pro které dvojice prvočísel p a q má rovnice $x^2 + px = q^2$ celočíselné řešení? [Jedině $p = 3$ a $q = 2$.]
4. Najděte všechny dvojice přirozených čísel a a b, pro které má rovnice $x^2 - ax + b^2 = 0$ dva kořeny, jejichž rozdíl se rovná číslu 30. [Hledané dvojice (a, b) jsou $(226, 112)$, $(78, 36)$, $(50, 20)$ a $(34, 8)$.]

2. *V daném trojúhelníku ABC označme D ten bod polopřímky CA, pro který platí $|CD| = |CB|$. Dále označme po řadě E, F středy úseček AD a BC. Dokažte, že $|\sphericalangle BAC| = 2|\sphericalangle CEF|$, právě když $|AB| = |BC|$.*

Řešení. Označme G ten bod polopřímky opačné k polopřímce AC, pro který platí $|AG| = |BC| = |CD|$ (obr. 1a pro situaci, kdy $|AC| > |BC|$, a obr. 1b pro situaci, kdy $|AC| < |BC|$ — sami nakreslete a rozmyslete situaci, kdy $|AC| = |BC|$). V trojúhelníku ABG označme ještě $\varepsilon = |\sphericalangle ABG|$ a $\delta = |\sphericalangle BGA|$. Protože $|EA| = |ED|$ a $|AG| = |CD|$, je bod E střed úsečky CG, tudíž úsečka EF je střední příčka trojúhelníku BCG. Platí proto $EF \parallel GB$ a z rovnosti souhlasných úhlů BGA a FEC dostáváme $|\sphericalangle FEC| = \delta$. Protože úhel BAC je vnějším úhlem trojúhelníku ABG, pro jeho velikost $\alpha = |\sphericalangle BAC|$



Obr. 1a



Obr. 1b

platí $\alpha = \varepsilon + \delta$. To znamená, že rovnost $\alpha = 2\delta$ ze zadání úlohy nastane, právě když $\varepsilon + \delta = 2\delta$, neboli $\varepsilon = \delta$. Z trojúhelníku ABG ovšem plyne, že rovnost $\varepsilon = \delta$ je splněna, právě když $|AB| = |AG|$, neboli $|AB| = |BC|$. Tím je ekvivalence rovností $\alpha = 2\delta$ a $|AB| = |BC|$ dokázána.

Jiné řešení. Místo „trikově" zvoleného pomocného bodu G z prvního řešení sestrojíme osu o vnitřního úhlu BAC daného trojúhelníku ABC a její průsečík se stranou BC označíme H (obr. 2a a 2b pro situace $|AC| > |BC|$, resp. $|AC| < |BC|$). Význam osy o pro řešení naší úlohy je zřejmý: podle souhlasných úhlů CEF a CAH usoudíme, že rovnost $|\sphericalangle BAC| = 2|\sphericalangle CEF|$ ze zadání úlohy nastane, právě když budou úsečky AH a EF rovnoběžné, neboli trojúhelníky CAH a CEF podobné. Podle věty *sus* jsou trojúhelníky CAH a CEF podobné, právě když je splněna úměra

$$|AC| : |HC| = |EC| : |FC|. \qquad (*)$$

Rovnost $|\sphericalangle BAC| = 2|\sphericalangle CEF|$ je tedy ekvivalentní s podmínkou $(*)$, kterou nyní prozkoumáme.

Délky úseček zastoupených v $(*)$ nejprve vyjádříme pomocí délek

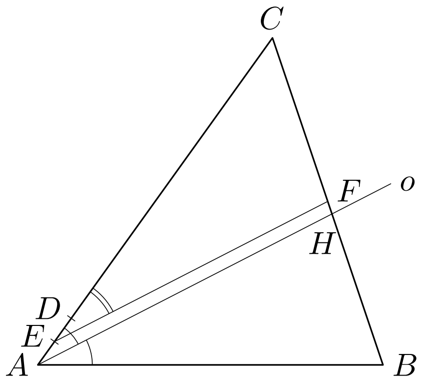
$$a = |BC|, \quad b = |AC|, \quad c = |AB|$$

stran výchozího trojúhelníku ABC. Protože bod F je střed úsečky BC a bod E střed úsečky AD, platí $|FC| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}a$ a

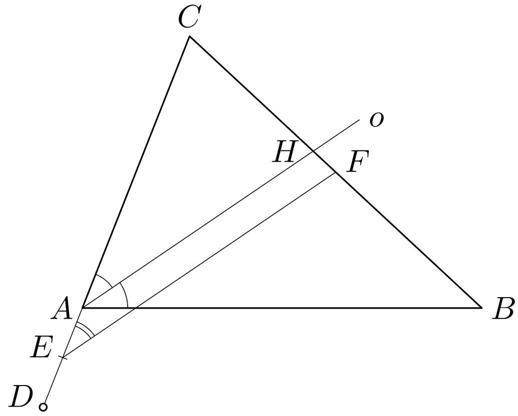
$$|EC| = \frac{|AC| + |DC|}{2} = \frac{|AC| + |BC|}{2} = \frac{b + a}{2}.$$

Zbývá vyjádřit délku úsečky HC. Z rovností

$$|HC| + |HB| = a, \quad |HC| : |HB| = b : c$$



Obr. 2a



Obr. 2b

(první z nich je triviální, druhá vyjadřuje známý fakt o poměru, ve kterém osa vnitřního úhlu dělí protější stranu trojúhelníku, viz 3. návodnou úlohu) dostaneme po snadném výpočtu vyjádření

$$|HC| = \frac{ab}{b+c}.$$

Dosaďme nyní všechny určené délky do rovnosti (∗) a pak ji dále ekvivalentně upravujme:

$$\begin{aligned} b : \frac{ab}{b+c} &= \frac{a+b}{2} : \frac{a}{2}, \\ \frac{b+c}{a} &= \frac{a+b}{a}, \\ b+c &= a+b, \\ c &= a. \end{aligned}$$

Dokázali jsme potřebné: podmínka (∗) platí, právě když $c = a$, neboli $|AB| = |BC|$.

Návodné a doplňující úlohy:

1. K libovolnému trojúhelníku ABC sestrojíme ten bod D polopřímky CA, pro který platí $|CD| = |CB|$. Vyjádřete velikost úhlu ABD pomocí velikostí $\alpha = |\sphericalangle BAC|$ a $\beta = |\sphericalangle ABC|$. [$|\sphericalangle ABD| = \frac{1}{2}|\alpha - \beta|$. Uvažte, že CBD je úhel při základně BD rovnoramenného trojúhelníku BCD.]
2. Označme obvyklým způsobem α, β, γ vnitřní úhly trojúhelníku ABC a pro střed D strany AC uvažujme ještě úhly $\delta = |\sphericalangle ADB|$ a $\varepsilon = |\sphericalangle BDC|$. Dokažte, že rovnosti $\delta = 2\gamma$, $\varepsilon = 2\alpha$ a $\beta = 90°$ jsou navzájem ekvivalentní. [Každá ze tří rovností je ekvivalentní s tím, že $|AD| = |BD| = |CD|$.]
3. Dokažte, že osa vnitřního úhlu BAC protne protější stranu BC obecného trojúhelníku ABC v bodě H, pro nějž platí $|HB| : |HC| = |AB| : |AC|$. [Dvojím způsobem vyjádřete poměr obsahů trojúhelníků ABH a ACH se shodnými výškami z každého ze společných vrcholů A a H.]

3. *Rozhodněte, zda nerovnost*

$$a(b+1) + b(c+1) + c(d+1) + d(a+1) \geqq \tfrac{1}{2}(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)$$

platí pro libovolná kladná čísla a, b, c, d, která vyhovují podmínce
a) $ab = cd = 1$; *b)* $ac = bd = 1$.

Řešení. a) Danou nerovnost budeme ekvivalentně upravovat postupným roznásobováním; jakmile se přitom někde objeví součin ab nebo cd, nahradíme ho číslem 1:

$$
\begin{aligned}
2(ab+a+bc+b+cd+c+da+d) &\geqq (ab+a+b+1)(cd+c+d+1),\\
2(ad+bc+a+b+c+d+2) &\geqq (a+b+2)(c+d+2),\\
2(ad+bc)+2(a+b+c+d)+4 &\geqq ac+ad+bc+bd+2(a+b+c+d)+4,\\
ad+bc &\geqq ac+bd,\\
(a-b)(c-d) &\leqq 0.
\end{aligned}
$$

Poslední nerovnost obecně neplatí, jak ukazuje příklad $a=c=2$ a $b=d=\frac{1}{2}$ (hodnoty jsou zvoleny tak, aby byly splněn předpoklad $ab=cd=1$).

b) Danou nerovnost budeme upravovat s podobnou strategií jako v části a). Protože však tentokrát můžeme číslem 1 nahrazovat součiny ac a bd, vynásobíme na pravé straně nerovnosti nejprve první činitel s třetím a druhý činitel se čtvrtým:

$$
\begin{aligned}
2(ab+a+bc+b+cd+c+da+d) &\geqq (ac+a+c+1)(bd+b+d+1),\\
2(ab+bc+cd+ad+a+b+c+d) &\geqq (a+c+2)(b+d+2),\\
2(ab+bc+cd+ad)+2(a+b+c+d) &\geqq ab+ad+bc+cd+2(a+b+c+d)+4,\\
ab+bc+cd+da &\geqq 4,\\
(a+c)(b+d) &\geqq 4.
\end{aligned}
$$

Poslední nerovnost platí pro všechny čtveřice kladných čísel a, b, c, d splňující předpoklad $ac=bd=1$, protože každý z obou činitelů $a+c$ a $b+d$, jsa součtem kladného čísla a čísla k němu převráceného, je větší nebo roven číslu 2. Tento známý výsledek

$$u>0 \quad\Longrightarrow\quad u+\frac{1}{u}\geqq 2 \tag{$*$}$$

plyne přímo z identické rovnosti

$$u+\frac{1}{u}=\left(\sqrt{u}-\frac{1}{\sqrt{u}}\right)^2+2$$

a poznatku, že druhá mocnina libovolného reálného čísla je nezáporná. Odhad $(*)$ lze rovněž získat ze známé nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem

$$A=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geqq G=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$

libovolných nezáporných čísel a_i, když zvolíme $n=2$, $a_1=u$ a $a_2=1/u$.

Odpověď: Zkoumaná nerovnost za podmínky a) obecně neplatí, za podmínky b) platí.

Jiné řešení. a) Použijeme „dosazovací strategii“: z dané podmínky $ab=cd=1$ vypočteme $b=1/a$, $d=1/c$ a takto vyjádřená čísla b a d dosadíme do zkoumané nerovnosti. Dostaneme nerovnost s dvěma (již nezávislými) proměnnými a a c; naší úlohou bude zjistit, zda platí pro libovolné hodnoty $a > 0$ a $c > 0$:

$$\begin{gathered}
a\Big(\frac{1}{a}+1\Big)+\frac{1}{a}(c+1)+c\Big(\frac{1}{c}+1\Big)+\frac{1}{c}(a+1) \geqq \frac{1}{2}(a+1)\Big(\frac{1}{a}+1\Big)(c+1)\Big(\frac{1}{c}+1\Big),\\
2+a+c+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{c} \geqq \frac{1}{2}\Big(2+a+\frac{1}{a}\Big)\Big(2+c+\frac{1}{c}\Big),\\
2+a+c+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{c} \geqq 2+a+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}\Big(ac+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{1}{ac}\Big),\\
\frac{c}{a}+\frac{a}{c} \geqq ac+\frac{1}{ac},\\
c^2+a^2 \geqq a^2c^2+1,\\
0 \geqq (a^2-1)(c^2-1).
\end{gathered}$$

Vidíme, že poslední nerovnost pro kladná čísla a, c obecně neplatí, stačí zvolit např. hodnoty $a = c = 2$, kterým odpovídají hodnoty $b = d = \frac{1}{2}$.

b) Podobně jako v části a) z dané podmínky $ac = bd = 1$ vypočteme tentokrát $c = 1/a$, $d = 1/b$ a po dosazení za c, d do zkoumané nerovnosti dostaneme nerovnost s nezávislými proměnnými $a > 0$ a $b > 0$:

$$\begin{gathered}
a(b+1)+b\Big(\frac{1}{a}+1\Big)+\frac{1}{a}\Big(\frac{1}{b}+1\Big)+\frac{1}{b}(a+1) \geqq \frac{1}{2}(a+1)(b+1)\Big(\frac{1}{a}+1\Big)\Big(\frac{1}{b}+1\Big),\\
ab+a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{1}{ab} \geqq \frac{1}{2}\Big(2+a+\frac{1}{a}\Big)\Big(2+b+\frac{1}{b}\Big),\\
ab+a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{1}{ab} \geqq \frac{1}{2}\Big(4+2a+2b+ab+\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{1}{ab}\Big),\\
ab+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{1}{ab} \geqq 4.
\end{gathered}$$

Poslední nerovnost ovšem zřejmě platí pro libovolná kladná čísla a a b, neboť je součtem dvou nerovností

$$ab+\frac{1}{ab} \geqq 2 \quad \text{a} \quad \frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqq 2$$

typu $(*)$ z prvního řešení, a to pro hodnoty $u = ab$, resp. $u = a/b$.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Je-li $a > 0$, $b > 0$ a $ab = 2$, pak $(a+1)(b+2) \geqq 8$, dokažte.
2. Dokažte, že $a^2 + 3 \geqq 2\sqrt{a^2+2}$ pro každé reálné a. [Užijte odhad $(*)$ pro $u = \sqrt{a^2+2}$.]
3. Dokažte, že $(ab+cd)\left(\dfrac{1}{ac}+\dfrac{1}{bd}\right) \geqq 4$ pro libovolná kladná čísla a, b, c, d. [Roznásobte a užijte dvě nerovnosti $(*)$.]
4. Dokažte, že $(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)(d^2+d+1) \geqq 81abcd$ pro libovolná kladná čísla a, b, c, d. [Činitele na levé straně vydělte po řadě čísly a, b, c, d a pak užijte čtyři nerovnosti $(*)$.]

4. *Každou z hvězdiček v zápisech dvanáctimístných čísel* $A = *88\,888\,888\,888$*,* $B = *11\,111\,111\,111$ *nahraďte nějakou číslicí tak, aby výraz* $|14A - 13B|$ *měl co nejmenší hodnotu.*

ŘEŠENÍ. Hvězdičku v čísle A nahradíme číslicí a, hvězdičku v čísle B číslicí b a vyjádříme výraz $14A-13B$ algebraicky jako lineární funkci (neznámých) číslic a a b. Protože platí

$$11\,111\,111\,111\,111 = \frac{99\,999\,999\,999\,999}{9} = \frac{10^{11}-1}{9},$$

mají čísla A a B vyjádření

$$A = a \cdot 10^{11} + \frac{8}{9} \cdot (10^{11}-1) \quad \text{a} \quad B = b \cdot 10^{11} + \frac{1}{9} \cdot (10^{11}-1),$$

odkud dostáváme

$$\begin{aligned} 14A - 13B &= (14a - 13b) \cdot 10^{11} + \frac{(14 \cdot 8 - 13)}{9} \cdot (10^{11} - 1) = \\ &= (14a - 13b + 11) \cdot 10^{11} - 11. \end{aligned} \qquad (*)$$

Jistě si uvědomíme, že absolutní hodnota takového výrazu je minimální, právě když je minimální absolutní hodnota výrazu $14a-13b+11$. Precizně to zdůvodníme nerovnostmi až poté, co zjistíme, zda pro některé číslice a, b dokonce neplatí rovnost $14a-13b+11 = 0$. Vyjádříme-li z takové rovnice neznámou b,

$$b = \frac{14a+11}{13} = a + 1 + \frac{a-2}{13},$$

a všimneme si, že pro libovolnou číslici a platí $-2 \leqq a-2 \leqq 7$, vidíme, že hodnota b daná posledním vzorcem je celočíselná jedině v případě $a - 2 = 0$, kdy $a = 2$ a $b = 3$. Jedině pro takové číslice a, b platí $14a - 13b + 11 = 0$, takže podle $(*)$ pak máme $|14A-13B| = 11$. Pro libovolnou jinou dvojici číslic a, b ovšem platí $14a-13b+11 \neq 0$, takže tentokrát podle $(*)$ usoudíme, že

$$\begin{aligned} &\text{buď} \quad 14a - 13b + 11 \geqq 1, \quad &&\text{a tedy} \quad 14A - 13B \geqq 10^{11} - 11 > 11, \\ &\text{nebo} \quad 14a - 13b + 11 \leqq -1, \quad &&\text{a tedy} \quad 14A - 13B \leqq -10^{11} - 11 < -11, \end{aligned}$$

v obou případech tedy $|14A - 13B| > 11$.

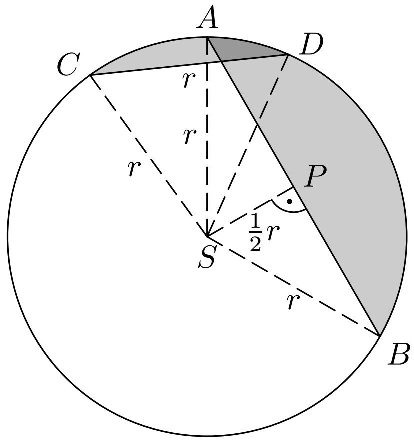
Odpověď: Výraz $|14A - 13B|$ má nejmenší možnou hodnotu jedině tehdy, když hvězdičky v číslech A, B nahradíme po řadě číslicemi 2 a 3.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Najděte všechny dvojice přirozených čísel a a b, pro něž platí $55a + 16b = 2\,005$. [Vyhovují dvojice (a, b) tvaru $(3, 115)$, $(19, 60)$ a $(35, 5)$. Návod: Číslo b musí být dělitelné pěti, číslo $5b - 3$ dělitelné jedenácti.]
2. Najděte největší zápornou a nejmenší kladnou hodnotu výrazu $12 \cdot \overline{a555} - 5 \cdot \overline{b777}$, kde a a b jsou první číslice čtyřmístných čísel, jejichž dekadický zápis je vyznačen čarou nad číslicemi. [-225, resp. $1\,775$.]
3. Pro která přirozená čísla a, b, c platí $7a + 5b = 333$ a zároveň $4a + 11c = 222$? [Jedině $a = 39$, $b = 12$ a $c = 6$. Zkoumejte dělitelnost čísly 11, 7, 5 a 4.]

5. *Kruh o středu S a poloměru r je rozdělen na čtyři části dvěma tětivami, z nichž jedna má délku r a druhá má od středu S vzdálenost $\frac{1}{2}r$. Dokažte, že absolutní hodnota rozdílu obsahů těch dvou částí, které mají společný právě jeden bod, a přitom žádná z nich neobsahuje střed S, je rovna jedné šestině obsahu kruhu.*

Řešení. Označme dané tětivy AB a CD jako na obr. 3, kde je rovněž vyznačen střed P tětivy AB, takže podle zadání platí $|SP| = \frac{1}{2}r$ a $|CD| = r$. Zkoumaný rozdíl



Obr. 3

obsahů dvou světle vybarvených částí kruhu se nezmění, když ke každé z nich připojíme tutéž (třetí) část kruhu, jež má s jeho hraniční kružnicí společný oblouk AC a je na obr. 3 vybarvena tmavě. Tak vzniknou dvě kruhové úseče, jedna nad tětivou AB, druhá nad tětivou CD. Jejich obsahy jsou určeny velikostmi úhlů ASB a CSD. Z rovnostranného trojúhelníku CSD ihned máme $|\sphericalangle CSD| = 60°$, takže obsah S_1 úseče nad tětivou CD je roven

$$S_1 = \frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}.$$

V pravoúhlém trojúhelníku APS platí $|AS| : |SP| = 2 : 1$, tudíž $|\sphericalangle ASP| = 60°$, $|\sphericalangle ASB| = 2|\sphericalangle ASP| = 120°$, $|AB| = r\sqrt{3}$ a obsah S_2 úseče nad tětivou AB je roven

$$S_2 = \frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}.$$

Nyní již snadno určíme rozdíl $S_2 - S_1$:

$$S_2 - S_1 = \left(\frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right) - \left(\frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\pi r^2}{6},$$

což je právě šestina obsahu celého kruhu.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Nechť P je průsečík úhlopříček konvexního čtyřúhelníku $ABCD$. Dokažte, že trojúhelníky ADP a BCP mají stejný obsah, právě když $AB \parallel CD$. [Rozdíl obsahů trojúhelníků

ADP a BCP je stejný jako rozdíl obsahů trojúhelníků ABD a ABC, které mají společnou stranu AB, takže mají stejný obsah, právě když mají shodné výšky z protilehlých vrcholů D a C.]

2. Vypočtěte obsah průniku kruhů $K_1(S_1, r)$ a $K_2(S_2, r\sqrt{3})$, je-li $|S_1S_2| = 2r$. [$\frac{5}{6}\pi r^2 - r^2\sqrt{3}$]
3. Kruhy K_1, K_2, K_3 a K_4 se shodným poloměrem r mají středy ve vrcholech čtverce C o straně $r\sqrt{2}$. Kruh K o poloměru $2r$ má střed v průsečíku úhlopříček čtverce C. Vypočítejte obsah rovinné množiny $K - (K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4)$. [$(2\pi - 4)r^2$]

6. *Určete nejmenší přirozené číslo n s následující vlastností: Zvolíme-li n různých přirozených čísel menších než 2 006, jsou mezi nimi dvě taková, že podíl součtu a rozdílu jejich druhých mocnin je větší než tři.*

Řešení. Zjistíme nejdříve, pro která přirozená čísla a, b platí zmíněná nerovnost

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} > 3. \tag{$*$}$$

Aby byl zlomek na levé straně kladný, musí platit $a^2 > b^2$, neboli $a > b$. Je-li tato nutná podmínka splněna, vynásobíme obě strany zkoumané nerovnosti kladným číslem $a^2 - b^2$ a dalšími úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &> 3(a^2 - b^2),\\ 4b^2 &> 2a^2,\\ b\sqrt{2} &> a. \end{aligned}$$

Zjistili jsme, že dvě přirozená čísla a, b vyhovují podmínce ($*$), právě když platí nerovnosti $1 < a/b < \sqrt{2}$.

Přirozená čísla od 1 do 2 005 nyní rozdělíme do skupin tak, aby v nich bylo co nejvíce čísel a aby podíl největšího a nejmenšího čísla každé skupiny byl menší než $\sqrt{2}$. Provedeme to tak, že do skupin budeme postupně zařazovat čísla 1,2,... a k nové skupině vždy přejdeme, až to bude nezbytné.[1] Dostaneme tak těchto dvacet skupin:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1\}, & A_2 &= \{2\},\\ A_3 &= \{3, 4\}, & A_4 &= \{5, 6, 7\},\\ A_5 &= \{8, \dots, 11\}, & A_6 &= \{12, \dots, 16\},\\ A_7 &= \{17, \dots, 24\}, & A_8 &= \{25, \dots, 35\},\\ A_9 &= \{36, \dots, 50\}, & A_{10} &= \{51, \dots, 72\},\\ A_{11} &= \{73, \dots, 103\}, & A_{12} &= \{104, \dots, 147\},\\ A_{13} &= \{148, \dots, 209\}, & A_{14} &= \{210, \dots, 296\},\\ A_{15} &= \{297, \dots, 420\}, & A_{16} &= \{421, \dots, 595\},\\ A_{17} &= \{596, \dots, 842\}, & A_{18} &= \{843, \dots, 1\,192\},\\ A_{19} &= \{1\,193, \dots, 1\,687\}, & A_{20} &= \{1\,688, \dots, 2\,005\}. \end{aligned}$$

[1] K porovnávání podílů a/b s číslem $\sqrt{2}$ výhodně využijeme třeba kalkulačku.

Vysvětlíme například, jak vznikla skupina A_{11}. Číslo 73 jsme již nemohli zařadit do skupiny A_{10}, neboť pro jeho podíl s nejmenším číslem 53 této skupiny platí

$$\frac{73}{51} = 1{,}431\ldots > 1{,}414\ldots = \sqrt{2};$$

Číslo 103 jsme ještě mohli do skupiny A_{11} zařadit, neboť

$$\frac{103}{73} = 1{,}410\ldots < 1{,}414\ldots = \sqrt{2}.$$

Jaké má sestrojené rozdělení význam pro řešení zadané úlohy? Pro libovolná dvě čísla a, b z téže skupiny A_i nerovnost $(*)$ platí. Skupin A_i je dohromady 20; vybereme-li proto libovolně 21 čísel z množiny $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{20}$, budou některá dvě z nich patřit do téže skupiny A_i,[2] tudíž budou splňovat $(*)$. Proto číslo $n = 21$ má vlastnost ze zadání úlohy. Číslo $n = 20$ ji ovšem nemá: vybereme-li z každé ze skupin A_i její nejmenší prvek, dostaneme dvacet čísel

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 12,\ 17,\ 25,\ 36,\ 51,\ 73,\ 104,\ 148,\ 210,\ 297,\ 421,\ 596,\ 843,\ 1\,193,\ 1\,688, \qquad (**)$$

mezi nimiž nejsou žádná dvě čísla a, b splňující $(*)$, neboť podle naší konstrukce je podíl následujícího čísla k číslu předchozímu vždy větší než $\sqrt{2}$.

Poznamenejme, že pouhé uvedení dvaceti čísel $(**)$ z posledního odstavce nelze považovat za úplné řešení úlohy, i když prohlásíme, že jsme tuto dvacetici vybrali „co nejlépe", tj. aby měla co nejvíce prvků a aby žádné dva z nich nesplňovaly $(*)$.[3] Nemožnost výběru podobné skupiny 21 čísel je třeba nezpochybnitelně zdůvodnit; k tomu nám posloužil přihrádkový princip uplatněný k sestrojeným skupinám A_i.

Odpověď: Nejmenší přirozené číslo s požadovanou vlastností je $n = 21$.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Na večírku je několik hostů. Dokažte, že dva z nich mají mezi ostatními hosty stejný počet přátel (přátelství je symetrický vztah: je-li A přítelem B, je i B přítelem A). [Pokud každý z hostů má na večírku aspoň jednoho přítele, rozdělte hosty do skupin tak, aby v téže skupině byli právě ti, kteří mají na večírku stejný počet přátel. Skupin je méně než hostů. V opačném případě můžeme předpokládat, že na večírku je jediný host bez přátel. Na ostatní hosty pak použijeme předchozí úvahu. Anebo si uvědomte, že nemohou současně existovat host bez přátel a host, který je spřátelen se všemi ostaními hosty! Odtud rovnou plyne, že zmíněných skupin je méně než hostů.]
2. Dokažte, že z libovolné n-tice celých čísel lze vybrat jedno nebo několik čísel tak, že součet vybraných čísel je dělitelný číslem n. [Označte čísla $a_1, \ldots, a_n$ a rozdělte n součtů $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_n = a_1 + \ldots + a_n$ do skupin podle jejich zbytků při dělení číslem n.]
3. Vybereme-li ve čtverci 3×3 libovolných deset bodů, pak některé dva z nich mají vzdálenost nejvýše $\sqrt{2}$, dokažte. [Rozdělte celý čtverec na 9 čtverců 1×1, v jednom z nich leží dva z vybraných bodů.]

---

[2] Tomuto zřejmému poznatku se říká *přihrádkový* nebo též *Dirichletův* princip. Obecněji zní takto: Je-li $mk + 1$ předmětů umístěno do m skupin, leží v některé z nich aspoň $k + 1$ z těchto předmětů. V našem případě je $m = 20$ a $k = 1$.

[3] K ověření poznatku, že číslo $n = 20$ zkoumanou vlastnost nemá, mohou posloužit i mnohé jiné dvacetice čísel. Například číslo 1 688 v $(**)$ můžeme zaměnit kterýmkoliv jiným číslem ze skupiny A_{20} apod.

4. Určete nejmenší přirozené číslo n s vlastností: vybereme-li libovolných n různých čísel z množiny $\{1, 2, \dots, 100\}$, pak mezi vybranými čísly existují dvě čísla, jejichž a) rozdíl je dělitelný číslem 11, b) rozdíl je roven 11, c) součet je roven 111. [a) $n = 12$, b) $n = 56$, c) $n = 56$. Návod k b): Čísla od 1 do 110 (nikoliv pouze do 100) rozdělte do 55 dvouprvkových skupin $\{x, x + 11\}$, kde $x = 22k + j$, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ a $j \in \{1, 2, \dots, 11\}$. Vybereme-li z každé skupiny menší z obou čísel, dostaneme 55 čísel z množiny $\{1, 2, \dots, 100\}$, které požadovanou vlastnost nemají. Vybereme-li 56 čísel z množiny $\{1, 2, \dots, 100\}$, leží dvě z nich ve stejné skupině. Návod k c): Čísla od 1 do 110 rozdělte do 55 dvouprvkových skupin $\{x, 111 - x\}$, kde $x \in \{1, 2, \dots, 55\}$, a proveďte obdobnou úvahu jako v části b).]