55. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie A

1. Najděte všechny dvojice celých čísel x a y, pro něž platí

$$\sqrt{x\sqrt{5}} - \sqrt{y\sqrt{5}} = \sqrt{6\sqrt{5} - 10}.$$

2. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC o obsahu S a jeho vnitřní bod M. Označme po řadě A_1, B_1, C_1 ty body stran BC, CA a AB, pro něž platí $MA_1 \parallel AB$, $MB_1 \parallel BC$ a $MC_1 \parallel CA$. Průsečíky os úseček MA_1, MB_1 a MC_1 tvoří vrcholy trojúhelníku o obsahu T. Dokažte, že platí $S = 3T$.

3. V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$1 + \sin\frac{x+\pi}{5} \cdot \sin\frac{x-\pi}{11} = 0.$$

Klauzurní část školního kola kategorie A se koná

v úterý 6. prosince 2005

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Z tvaru dané rovnice ihned plyne, že $x > y \geqq 0$ (neboť $6\sqrt{5} - 10 > 0$). Pro taková x, y můžeme umocnit obě (kladné) strany rovnice na druhou a provést další ekvivalentní úpravy:

$$\begin{aligned} x\sqrt{5} - 2\sqrt{5xy} + y\sqrt{5} &= 6\sqrt{5} - 10, \\ x - 2\sqrt{xy} + y &= 6 - 2\sqrt{5}, \\ x + y - 6 &= 2\bigl(\sqrt{xy} - \sqrt{5}\bigr). \end{aligned} \tag{1}$$

Umocněním a další úpravou dostaneme, že pro hledaná celá čísla x, y musí platit

$$\begin{aligned} (x + y - 6)^2 &= 4\bigl(xy - 2\sqrt{5xy} + 5\bigr), \\ 8\sqrt{5xy} &= 4(xy + 5) - (x + y - 6)^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Z poslední rovnice plyne, že hodnota $\sqrt{5xy}$ je racionální, a tedy celé číslo,[1] takže $5xy$ je druhá mocnina nezáporného celého čísla, jež je zřejmě dělitelné pěti.[2] Platí tedy $5xy = (5k)^2$ neboli $xy = 5k^2$, kde k je nezáporné celé číslo. Už teď je výhodné dosadit ne do rovnice (2), ale rovnou do rovnice (1). Dostaneme totiž rovnici

$$x + y - 6 = 2\bigl(\sqrt{5k^2} - \sqrt{5}\bigr) \quad \text{neboli} \quad x + y - 6 = 2(k - 1)\sqrt{5},$$

odkud díky iracionalitě čísla $\sqrt{5}$ vyplývá, že ke splnění rovnice (1) je nutné a stačí, aby platily obě rovnosti $k = 1$ a $x + y - 6 = 0$. Ze soustavy rovnic

$$xy = 5k = 5, \quad x + y = 6$$

snadno zjistíme, že $\{x, y\} = \{5, 1\}$, tedy $x = 5$ a $y = 1$, neboť $x > y$ podle úvodní úvahy.

Hledaná dvojice (x, y) je jediná, a to $(x, y) = (5, 1)$.

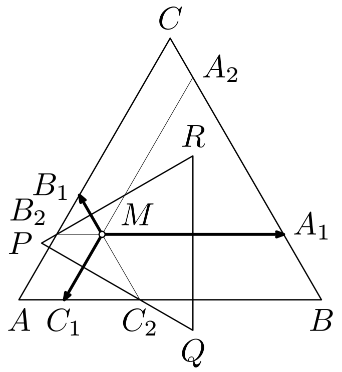
Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 1 bod za první a 2 body za druhé z obou umocnění. Známé poznatky o druhých odmocninách a mocninách uvedené v obou poznámkách pod čarou mohou řešitelé užít přímo, aniž je formulují (či dokonce dokazují) jako pravidla (tj. v obecné podobě). Pokud v jinak úplném řešení není vyloučena dvojice $(x, y) = (1, 5)$ nebo není zmíněna podmínka $x > y$ a chybí zkouška při důsledkové úpravě umocněním (která v předvedeném řešení není potřeba), udělte jen 5 bodů.

2. Označme P, Q, R vrcholy vzniklého trojúhelníku. Protože každá z os úseček MA_1, MB_1 a MC_1 je kolmá na odpovídající stranu trojúhelníku ABC, svírají každé dvě ze stran trojúhelníku PQR úhel 60 stupňů, takže se jedná o rovnostranný trojúhelník (obr.).

---

[1] Druhá odmocnina nezáporného celého čísla je buď číslo celé, nebo číslo iracionální.

[2] Je-li n celé a n^2 je dělitelné pěti, je i n dělitelné pěti.



Ukážeme nyní, že součet délek úseček MA_1, MB_1 a MC_1 je (nezávisle na poloze bodu M) roven délce a strany výchozího trojúhelníku ABC. Označme proto po řadě B_2, C_2 a A_2 průsečíky přímek MA_1, MB_1 a MC_1 se stranami CA, AB a BC. Protože trojúhelníky MA_1A_2, MB_1B_2 a MC_1C_2 jsou rovnostranné, je

$$|MA_1| + |MB_1| + |MC_1| = |A_1A_2| + |A_2C| + |A_1B| = |BC| = a.$$

Pro libovolný (vnitřní) bod rovnostranného trojúhelníku platí, že součet jeho vzdáleností od všech stran trojúhelníku je roven příslušné výšce. To je snadno vidět např. z vyjádření obsahu takového trojúhelníku jako součtu obsahů tří trojúhelníků tvořených daným (vnitřním) bodem a dvojicí vrcholů. Protože bod M má od stran (rovnostranného) trojúhelníku PQR vzdálenosti $\frac{1}{2}|MA_1|$, $\frac{1}{2}|MB_1|$ a $\frac{1}{2}|MC_1|$, má výška t tohoto trojúhelníku velikost $t = \frac{1}{2}(|MA_1| + |MB_1| + |MC_1|) = \frac{1}{2}a$. Protože pro výšku v rovnostranného trojúhelníku ABC platí $v = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, je $S = \frac{1}{2}av = \frac{1}{3}v^2\sqrt{3}$. Podobně pro obsah T trojúhelníku PQR s výškou t dostáváme

$$T = \frac{\sqrt{3}}{3}\,t^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\Big(\frac{a}{2}\Big)^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\Big(\frac{v}{\sqrt{3}}\Big)^2 = \frac{\sqrt{3}}{9}v^2 = \frac{1}{3}S,$$

neboli $S = 3T$, což jsme chtěli dokázat.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Zjištění (včetně nějakého podpůrného argumentu), že trojúhelník PQR je rovnostranný, oceňte 3 body.

3. Protože všechny hodnoty funkce sinus leží v intervalu $\langle -1, 1\rangle$, je součin dvou hodnot sinu roven číslu -1, jen když je jedna hodnota 1 a druhá hodnota je -1. Číslo $x \in \mathbb{R}$ je tedy řešením dané rovnice, právě když existují čísla $k, l \in \mathbb{Z}$ taková, že platí dvojice rovností

$$\begin{cases} \dfrac{x+\pi}{5} = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \\ \dfrac{x-\pi}{11} = -\dfrac{\pi}{2} + 2l\pi, \end{cases} \qquad \text{nebo} \qquad \begin{cases} \dfrac{x+\pi}{5} = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \\ \dfrac{x-\pi}{11} = \dfrac{\pi}{2} + 2l\pi. \end{cases}$$

Vyřešíme-li tyto lineární rovnice, dostaneme vyjádření

$$\begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{2} + 10k\pi, \\ x = -\dfrac{9\pi}{2} + 22l\pi, \end{cases} \qquad \text{nebo} \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{7\pi}{2} + 10k\pi, \\ x = \dfrac{13\pi}{2} + 22l\pi. \end{cases}$$

Najdeme nyní všechny dvojice celých čísel (k, l), pro něž platí

$$\frac{3\pi}{2} + 10k\pi = -\frac{9\pi}{2} + 22l\pi, \quad \text{resp.} \quad -\frac{7\pi}{2} + 10k\pi = \frac{13\pi}{2} + 22l\pi.$$

Snadnou úpravou těchto rovnic (včetně krácení číslem 2π) dostaneme

$$5k + 3 = 11l, \quad \text{resp.} \quad 5k - 5 = 11l.$$

Upravíme-li první rovnici na tvar $5(k-6) = 11(l-3)$, pak úvahou o dělitelnosti nesoudělnými čísly 5 a 11 zjistíme, že všechna celočíselná řešení takové rovnice jsou tvaru $k = 6 + 11n$ a $l = 3 + 5n$, kde $n \in \mathbb{Z}$. Dosazením do příslušného vzorce pro x tak dostáváme první skupinu řešení

$$x = \frac{3\pi}{2} + 10k\pi = \frac{3\pi}{2} + 10(6 + 11n)\pi = 61{,}5\pi + 110n\pi.$$

Podobně z druhé rovnice $5k - 5 = 11l$ upravené do tvaru $5(k-1) = 11l$ zjistíme, že $k = 1 + 11n$, $l = 5n$ pro libovolné $n \in \mathbb{Z}$, takže druhá skupina řešení má vyjádření

$$x = -\frac{7\pi}{2} + 10k\pi = -\frac{7\pi}{2} + 10(1 + 11n)\pi = 6{,}5\pi + 110n\pi.$$

Shrnutí: Všechna řešení dané rovnice jsou dána vzorci

$$x = 61{,}5\pi + 110n\pi \quad \text{a} \quad x = 6{,}5\pi + 110n\pi, \quad \text{kde } n \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Protože $61{,}5 - 6{,}5 = 55 = \frac{110}{2}$, lze všechna řešení zapsat jedním vzorcem

$$x = 6{,}5\pi + 55n\pi, \quad \text{kde } n \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Jiné řešení. Díky goniometrickému vzorci

$$\sin A \sin B = \frac{\cos(A-B) - \cos(A+B)}{2}$$

lze rovnici $1 + \sin A \sin B = 0$ přepsat do tvaru

$$\cos(A+B) - \cos(A-B) = 2.$$

S ohledem na obor hodnot funkce kosinus je poslední rovnice splněna, právě když platí $\cos(A+B) = 1$ a $\cos(A-B) = -1$. Pro zlomky A, B z původní rovnice tak dostáváme soustavu rovností

$$A + B = \frac{x+\pi}{5} + \frac{x-\pi}{11} = 2k\pi,$$
$$A - B = \frac{x+\pi}{5} - \frac{x-\pi}{11} = \pi + 2l\pi,$$

která musí platit pro vhodná čísla $k, l \in \mathbb{Z}$. Sečtením a odečtením dostaneme

$$\frac{x+\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + (k+l)\pi \qquad \text{a} \qquad \frac{x-\pi}{11} = -\frac{\pi}{2} + (k-l)\pi,$$

odkud dvojím způsobem vyjádříme neznámou x:

$$x = \frac{3\pi}{2} + 5(k+l)\pi = -\frac{9\pi}{2} + 11(k-l)\pi.$$

Snadno zjistíme, že čísla k, l jsou zde svázána podmínkou $3(k-1) = 8l$, což znamená, že $l = 3n$ a $k = 8n+1$ pro vhodné $n \in \mathbb{Z}$. Dosazením do vzorce pro x tak dojdeme ke stejnému vyjádření

$$x = \frac{13\pi}{2} + 55n\pi = 6{,}5\pi + 55n\pi$$

jako v prvním řešení.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 1 bod za úvahu o hodnotách goniometrických funkcí sinus či kosinus a další 2 body za sestavení analogických vztahů pro hledané řešení x. Za vyjádření x ve tvaru (1) nebo (2) udělte zbývající 3 body.