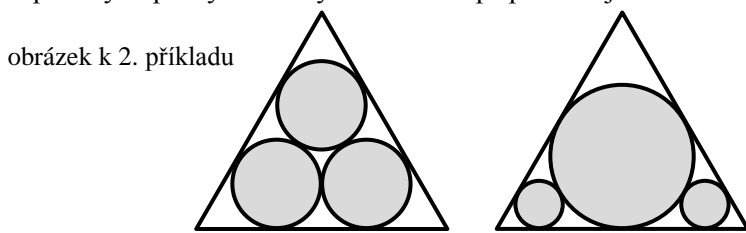
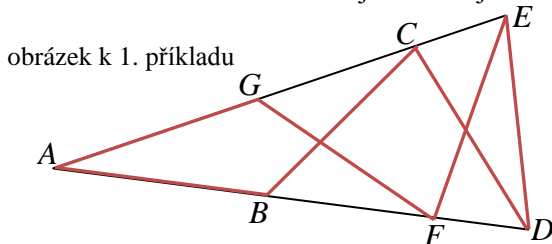
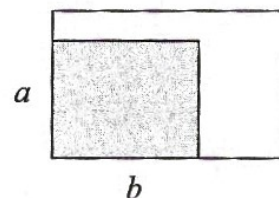


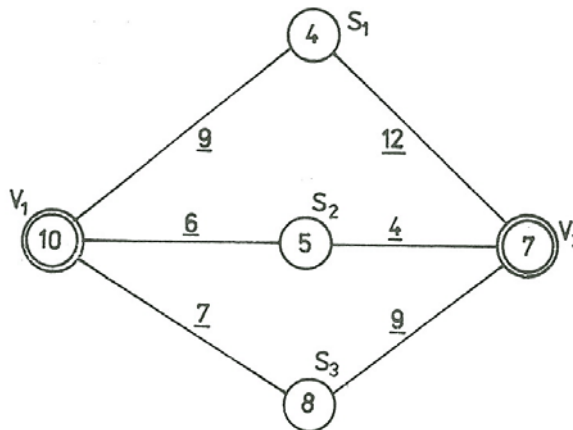
- ML Určete velikost $\angle DAE$, jestliže platí: $|AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EF| = |FG| = |GA|$.
- ST Do rovnostranného trojúhelníku jsou dvěma způsoby vepsány tři kruhy. Ve kterém případě mají větší obsah?



- ML Najděte všechny trojice přirozených čísel a, b, c takové, že největší společný dělitel čísel a, b je 3, čísel b, c je 4 a čísel a, c je 5 a nejmenší společný násobek všech tří čísel je 1800.
- ST Je-li dána konstanta $C \in \mathbb{R}$, pak najděte všechny funkce f takové, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) + C \cdot f(2-x) = (x-1)^3$.
- ML Existuje přirozené trojčíslo, v jehož zápise je namísto stovek jednička nebo dvojka, na místě desítek číslice o 2 větší než na místě jednotek, a přitom jeho součin se svým ciferným součtem je 3850?
- ML Právě polovinu plochy obdélníkového pozemku zaujímá obdélníkový komplex léčebny (viz situační plánec). Rozměry pozemku jsou o 20 a 40 metrů větší než rozměry budovy. Ty jsou označeny a a b . Určete rozměry budovy, jsou-li to v metrech celá čísla a obě menší než 105. Pro který z možných výsledků má pozemek nejmenší obvod?



- ML Na stromě seděly dvě opice, jedna na vršíčku, druhá 10 loktů od země. Se chtěly napít z pramene vzdáleného 40 loktů od stromu. Prvá opice skočila k prameni z vršku stromu a proletěla tutéž dráhu, jakou proběhla druhá opice. Z jaké výšky opice skočila?
- ST Výroba piva ve dvou domácích pivovarech V_1, V_2 pokrývá jeho týdenní spotřebu ve vesnicích S_1, S_2, S_3 . Množství vyrobeného a spotřebovaného piva v hektolitrech udávají na obrázku čísla v kroužcích. Podtržení čísla u úseček spojujících na obrázku jednotlivé výrobce a spotřebitele udávají ve stovkách Kč náklady na přepravu jednoho hektolitrů piva. Navrhněte a zdůvodněte distribuci piva k jednotlivým spotřebitelům tak, aby celkové náklady na jeho přepravu byly minimální.



- ST Z obdélníkové tabule z drahého kovu o rozměrech 100 x 60 cm se urazil roh ve tvaru pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami 10 cm a 4 cm. Z poškozené tabule vyřízneme opět obdélníkovou tabuli s co největším obsahem. Jaké bude mít rozměry? Zdůvodněte.
- ST V lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB, CD určete na úhlopříčce AC takový bod X , aby přímka p rovnoběžná s AB vedená tímto bodem protla ramena AD, BC v uvedeném pořadí v bodech M, N , pro které platí $|MX| = |NX|$. Vyjádřete délku úsečky MX pomocí $|AB| = a, |CD| = c$.

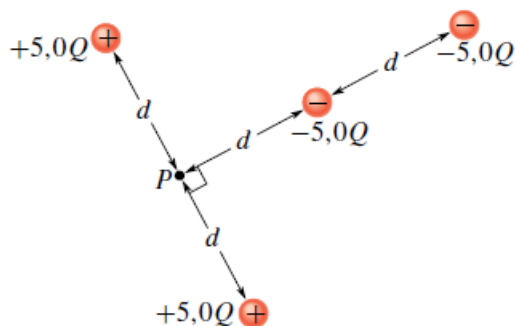
- ML Do kruhu bylo napsáno 100 nenulových čísel. Mezi každá dvě sousední čísla jsme napsali jejich součin a původní čísla smazali. Počet kladných čísel se nezměnil. Jaký minimální počet kladných čísel byl na začátku?
- ML Pepíčka strašlivě zajímalo, kolik let je jeho tetě. Jeho strýc, známý šprýmař, mu takto odpověděl: „Oběma nám už není 50, ale taky nám ještě není 80 let. Vynásobíš-li součet mého a jejího věku jejich rozdílem a k tomu přičteš oba naše věky, dostaneš číslo 492. Tak schválně. Kolik je tetě let?“
- ST Najděte všechna reálná čísla t , pro která má funkce $f(x) = 5x + 44 + t|x-2| - 3|x-t|$ maximum rovné 0?
- ST V oboru celých čísel řešte rovnici $\sqrt{x\sqrt{5}} - \sqrt{y\sqrt{5}} = \sqrt{6\sqrt{5}} - 10$

ÚLOHY – MOFO 2017

15. ML Čtyři čísla jsou v poměru $2\frac{2}{3} : 1,6 : \frac{8}{9} : \frac{8}{15}$. Sestavte z nich úměru, pro kterou platí: Součet čísel prvního poměru je o 240 větší než součet čísel druhého poměru.
16. ML Hrací kostka má tvar krychle a její stěny jsou označeny oky v počtu 1, 2, 3, 4, 5, 6 tak, že součet počtu ok na dvou protějších stěnách je vždy týž. K hrací kostce přilepíme další dvě stejné hrací kostky z téhož materiálu vždy celými stěnami. Jak kostky slepit a pak slepenec položit na stůl aspoň jednou stěnou tak, aby počet viditelných ok (na stěnách nepřiléhajících ke stolu) byl buď maximální, nebo minimální?
17. ST Na rovnoběžných přímkách p, q je umístěno celkem 28 různých bodů. Sestavujeme trojúhelníky, jejichž každý vrchol je některý z 28 umístěných bodů. Napište předpis funkce, která určuje, jak závisí počet těchto trojúhelníků na tom, kolik bodů z celkového počtu 28 je umístěno na p a kolik na q . Kdy nastane maximum? Na přímce p jsme umístili už 100 bodů. Kolik jich musíme ještě minimálně umístit na q , aby počet trojúhelníků překročil milion?
18. ST V hodině matematiky jsme si zdřímli a vzbudili se, když hodina končila. Jen slyšíme slova učitele: „... všechny kořeny jsou reálné a kladné.“ Rychle si stihneme z tabule opsat už jen začátek rovnice $x^{20} - 20x^{19} \dots$, zbytek se už mazal mokrou houbou na sucho. Ještě jsme si zapamatovali, že absolutní člen byl 1. Najděte všechny kořeny této rovnice. Zdůvodněte.
19. BONUS PRO NUMEROLOGY. Jedna z osob na MOFO má narozeniny 12.12. a svátek 22.2.. Čísla z těchto dat by se dala nazvat pobratřená, neboť mají několik společných vlastností: součty měsíců a dnů se rovnají ($12+12 = 22+2$), součty cifer se rovnají ($1+2+1+2 = 2+2+2$) a navíc rozdíl součinů měsíců a dnů je dělitelný číslem 100 ($12 \times 12 - 22 \times 2 = 100$). Takových dvojic dat lze najít v kalendáři poměrně mnoho, ale většina z nich vznikne triviálně záměnou dnů a měsíců (např. 11.9. a 9.11.). Najděte všechny netriviální dvojice (nebo alespoň nějaké). Kolik jich je? BONUS BONUSU: Jaká je pravděpodobnost, že se mezi účastníky MOFO vyskytne jedinec, jehož svátek a narozeniny se spolu tímto způsobem přátelí?

- Hasič hmotnosti 90 kg sjíždí z klidu dolů po tyči. Určete velikost síly, kterou na hasiče působí tyč, jestliže sjede dolů z výšky 6 m a při dopadu na zem má rychlost $4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Předpokládejte, že síly působící na hasiče jsou konstantní.
- Kámen hmotnosti 2 kg spadnul z určité výšky na podložku za 1,43 s. Stanovte kinetickou a potenciální energii kamene v polovině výšky, ze které padal. Odpor vzduchu zanedbejte.
- Pingpongový míček padá z výšky 1 m a několikrát se odrazí od podlahy, přičemž se výška výstupu postupně zmenšuje. Určete podíl rychlostí, které má míček bezprostředně po odrazu od podlahy a těsně před dopadem na podlahu. Byla změřena doba mezi začátkem pádu míčku a druhým dopadem na podlahu: 1,3 s. Odpor vzduchu zanedbejte.
- Letadlo hmotnosti 1000 kg letí vodorovně ve výšce 1200 m rychlostí $50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Náhle přestane pracovat motor, letadlo přejde do klouzavého letu a přistane na zem rychlostí $25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Odhadněte střední hodnotu aerodynamického odporu, jestliže letadlo urazilo během klouzavého letu dráhu 8 km.
- Každý ze dvou prázdných vagónů má hmotnost $m_0 = 25 \text{ t}$. Prázdný vagón stojí na kolejích, plný vagón se k němu blíží rychlostí o velikosti $3,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Po srážce se automaticky spojí a pokračují v jízdě společně rychlostí o velikosti $2,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Určete hmotnost nákladu.
- Při zapínání a vypínání harddisk své otáčky zvětšuje nebo zmenšuje přibližně rovnoměrně. Z klidu se roztočí za 5 s. Vypočti jeho úhlové zrychlení, je-li frekvence otáčení 7200 min^{-1} .
- Rychlost bodu na kraji rotujícího kotouče je $6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Rychlost druhého bodu, který je o 20 cm blíž k ose otáčení, je jen $4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Určete úhlovou rychlost otáčení kotouče a jeho poloměr.

- Jaký potenciál v bodě P budí soustava čtyř bodových nábojů, pokud $Q = 5 \text{ fC}$ a $d = 4 \text{ cm}$? Zvolte nulový potenciál v nekonečnu.



- Akumulátorová baterie o elektromotorickém napětí 12 V má počáteční náboj 120 A·h. Kolik hodin může dodávat energii při výkonu 100 W? Předpokládejte (nepříliš realisticky), že napětí na svorkách baterie zůstává konstantní, dokud se baterie úplně nevybíje.
- N stejných baterií o elektromotorickém napětí U_e a vnitřním odporu R_i je spojeno buď sériově nebo paralelně a poté jsou připojeny k rezistoru odporu R . Dokažte, že proud procházející rezistorem odporu R je stejný v obou případech, je-li $R = R_i$.
- Eskalátor jede dolů a jde po něm člověk ve směru jeho jízdy. Dolů se člověk dostane za 1 min. Jestli půjde po eskalátoru za jinak stejných podmínek dvakrát větší rychlostí, dostane se dolů za 45 s. Za jakou dobu by sjel dolů, pokud by na eskalátoru stál?