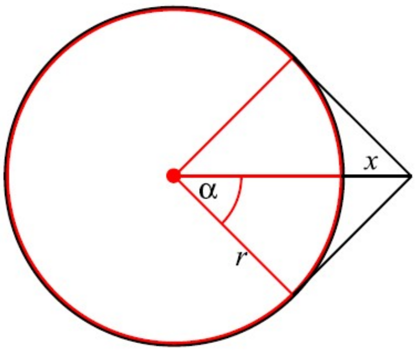
ÚLOHY – MoFo 2015

MATEMATIKA

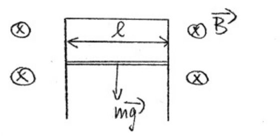
1. Dvě čísla $x, y \in Z$ sečteme, odečteme, vynásobíme a vydělíme. Tyto čtyři výsledky pak sečteme a dostaneme číslo 2016. Určete všechny možnosti výchozích čísel.
2. Na letní festival chceme připravit dva druhy závinů, a to jablečno-tvarohové a tvarohovo-jablečné. Do jablečno-tvarohových závinů dáme 100 g nastrouhaných jablek a 50 g tvarohu, do tvarohovo-jablečných závinů dáme 50 g jablek a 100 g tvarohu. Celkem jsme připravili 1,5 kg nastrouhaných jablek a koupili jsem osm tvarohů (každý 250 g). Prodejní cena jablečno-tvarohového závinu je 10 kč/ks, tvarohovo-jablečného 12 kč/ks. Výpočtem podložte doporučení na počty jednotlivých závinů, chceme-li náš zisk maximalizovat.
3. Obdélníkový list papíru přeložíme podél úhlopříčky a nepřekrývající se části odstřihneme. Po rozevření získáme kosočtverec. Ten opět přeložíme podél střední příčky a nepřekrývající se části zase odstřihneme. Jaký musí být poměr stran původního obdélníka, aby výsledný útvar byl pravidelný šestiúhelník?
4. Uvažme tři různé nenulové číslice. Sestavme z nich všechna možná trojciferná čísla. Při jejich sestupném seřazení zjistíme, že čtvrté číslo je aritmetickým průměrem prvního a pátého čísla v této řadě. Určete všechny možnosti těchto tří číslic.
5. V jistém státě na jihu Evropy nemají centy. Zato tam mají speciální stroj, který mění kovové euromince na papírové bankovky. Vhozená částka se nejprve zaokrouhlí na desítky, poté na stovky, až konečně na tisíce. Výsledná částka je pak vyplacena v bankovkách. Do bankomatu jsme nasypali celý pytlík euromincí. Ale vyplacená částka představovala v celých procentech jen 69 % vložené hodnoty mincí. Jaká mohla být hodnota vhozených euromincí?
6. Venda si v březnu koupil telefon, jehož cena byla čtyřciferné číslo korun. Když přišel do obchodu v květnu, zjistil, že cena vzrostla o 20%, s tím že obsahovala stejné cifry, ale v opačném pořadí. Kolik Venda za telefon zaplatil?
7. Jaké největší hodnoty může nabývat výraz $1:\left(a+2010:\left(b+1:c\right)\right)$, kde *a*, *b*, *c* jsou různé nenulové číslice?
8. Najděte všechny dvojice prvočísel *p* a *q*, pro které platí: $(7p + 1)$ je dělitelné *q* a $(7q + 1)$ je dělitelné *p*.
9. Alibaba napsal na tabuli pět celých čísel – koeficienty a kořeny kvadratického trojčlenu (tzn. a, b, c, x_1, x_2 v rovnici $ax^2+bx+c=0$). Šel kolem Rumcajs a jedno z čísel smazal. Zůstala čísla 2, 3, 4, -5 v nějakém pořadí. Zjistěte, které číslo bylo smazáno a čemu je rovno.
10. Najděte všechna přirozená čísla *n*, pro která je výraz 2^n+105 druhou mocninou přirozeného čísla.
11. Všimněme si, že pro čísla $a = 2$ a $b = 4$ platí vztah $a^b = b^a$. Najděte nějakou jinou dvojici (a,b) kladných vzájemně různých čísel s výše uvedenou vlastností.
12. Předpokládejme, že Země je koule o poloměru r = 6 378 000 m. Kolem rovníku natáhneme provaz tak, aby Zemi těsně obepínal. Poté provaz prodloužíme o 1 metr. Následně provaz v jednou místě vytáhneme, dokud se “nezarazí” o Zemi. Do jaké výšky *x* budeme moci provaz povytáhnout?



ÚLOHY –

FYZIKA

1. Homogenní těleso objemu V, hustoty ρ, plove na rozhraní mezi kapalinou hustoty ρ_1 a kapalinou hustoty ρ_2. Platí $\rho_1 > \rho_2$. Jaký objem má část tělesa ponořená v kapalině s hustotou ρ_1?
2. Je vysoce pravděpodobné, že člověk přežije automobilovou nehodu, nepřekročí-li zrychlení hodnotu 250 m/s^2. Jestliže dojde k nehodě při rychlosti 105 km/h, na jaké vzdálenosti musí dojít k zabrzdění pohybu lidského těla působením airbagu vymrštěného z přístrojové desky automobilu, aby nedošlo k úmrtí?
3. Jeden fyzik kdysi napsal: „V jediném písmenu této věty je tolik molekul inkoustu, že by po jedné mohli dostat nejen lidé na Zemi, ale i každý tvor v naší Galaxii, kdyby u každé hvězdy byla planeta s obdobnou populací, jako má Země.“ Ověřte toto tvrzení. Předpokládejte, že hmotnost inkoustu (molární hmotnost 18 g/mol) je 1 µg, že na Zemi žije $6 \cdot 10^9$ lidí a že počet hvězd v naší Galaxii je 10^{11}.
4. Do 200 g vody byly vhozeny a) dvě a b) jedna padesátigramová kostka ledu. Počáteční teplota vody byla 25°C, ledu -15°C. Jaká bude koncová teplota nápoje? Tepelnou kapacitu sklenice a ztráty tepla do okolí zanedbejte.
5. V homogenním magnetickém poli o indukci $B = 4 \cdot 10^{-2}$ T se nachází konstrukce, jejíž boční strany jsou orientovány vertikálně (obr. 1). Konstrukce se nachází v rovině kolmé k siločarám magnetického pole. Po bočních stranách konstrukce může sjíždět se zanedbatelným působením odporových sil tenká měděná tyčinka, která má měrný elektrický odpor $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ $\Omega \cdot m$ a hustotu $\rho_{Cu} = 8{,}8 \cdot 10^3$ kg/m^3. Jakou maximální rychlostí bude po konstrukci tyčinka sjíždět? Stejnou úlohu vyřešte pro případ, kdy boční konstrukce svírá s horizontální rovinou úhel 30°.



6. Potenciometr s celkovým odporem 4 kΩ je připojen ke zdroji elektromotorického napětí 110 V. Mezi svorkou potenciometru a jezdcem je připojen voltmetr s vnitřním odporem 10 kΩ. Jakou hodnotu napětí naměří voltmetr, je-li jezdec potenciometru přesně uprostřed jeho délky?
7. Volně padající těleso urazí v poslední sekundě pádu 1/3 celkové dráhy. Určete dobu pádu a výšku, ze které těleso spadlo.
8. Do svislé nádoby s podstavou 14 cm x 17 cm sypeme bonbony. Každý z nich má objem 50 mm^3 a hmotnost 0,02 g. Předpokládejme, že objem prázdného prostoru mezi bonbony je zanedbatelný. Výška, po kterou je nádoba zaplněna, vzrůstá rychlostí 0,25 cm/s. Jakou rychlostí (v kilogramech za minutu) vzrůstá hmotnost bonbonů v nádobě?